Schulinterner Lehrplan
Sekundarstufe II

Gustav-Heinemann-Gymnasium
der Stadt Dinslaken (GHG)

Mathematik

(zuletzt überprüft und redaktionell aktualisiert am 17.11.2020)

Inhalt

1 Rahmenbedingungen der fachlichen Arbeit

1.1 Rahmenbedingungen des schulischen Umfelds und fachliche Bezüge zu diesen Rahmenbedingungen

Das Gustav-Heinemann-Gymnasium ist eines von drei öffentlichen Gymnasien der Stadt Dinslaken. Trotz der örtlichen Lage im Stadtteil Hiesfeld ist eine Zusammenarbeit mit den beiden innerstädtischen Gymnasien und der Gesamtschule inzwischen möglich, seit diesem Schuljahr gibt es eine Oberstufenkooperation im Rahmen einer Leistungskurs-Schiene, die die Wahlmöglichkeiten für unsere Schüler*innen bereichert. Allerdings findet (bislang) keine Kooperation im Fach Mathematik statt. Diese ließe sich zurzeit auch nicht realisieren, da die innerstädtischen Gymnasien im Gegensatz zu uns in der Oberstufe mit einem GTR ohne CAS arbeiten und die innerstädtische Gesamtschule mit einem anderem CAS-System arbeitet als wir am GHG. Die Schule zeichnet sich durch einen MINT-Schwerpunkt aus und wird im Halbtag mit optionalem offenen Ganztagsangebot betrieben. Das GHG ist in der Sekundarstufe I in der Regel dreizügig. Als relativ kleine, eng mit dem Ortsteil Hiesfeld verbundene Schule mit nur etwa 550 Schüler*innen und 45 Lehrer*innen zeichnet uns eine enge Bindung innerhalb der Schulgemeinschaft aus: Schüler*innen, Lehrer*innen und Eltern arbeiten in aller Regel vertrauensvoll und konstruktiv zusammen. Da wir unsere Schüler*innen durch die insgesamt sehr überschaubare Zahl gut kennen, können wir alle Schüler*innen individuell in den Blick nehmen und im Blick behalten, indem wir für ein Schulklima sorgen, in dem sich alle am Schulleben Beteiligten möglichst wohl und geborgen fühlen.

In der Sekundarstufe I wird ein wissenschaftlicher Taschenrechner ab Klasse 7 (FX87DE X ClassWiz) verwendet, dynamische Geometrie-Software und Tabellenkalkulation werden an geeigneten Stellen im Unterricht genutzt, der Umgang mit ihnen eingeübt. Dazu stehen in der Schule zwei PC-Unterrichtsräume zur Verfügung. Außerdem steht allen Schüler*innen unserer Schule für den Präsenz- und Distanzunterricht seit dem Schuljahr 2020/21 MS365 als Lernplattform zur Verfügung, sodass auch zu Hause mit den Microsoft-Programmen gearbeitet werden kann. In der Sekundarstufe II kann deshalb davon ausgegangen werden, dass die Schüler*innen mit den grundlegenden Möglichkeiten dieser digitalen Werkzeuge vertraut sind.

Die Fachschaft Mathematik am GHG legt aber auch großen Wert darauf, dass unsere Schüler*innen den Umgang mit nicht-digitalen Werkzeugen sicher beherrschen und Routineverfahren, Abschätzungen und Überschlagsrechnungen auch ohne digitale Hilfsmittel durchführen können. Daher sind die Schüler*innen in der Sekundarstufe I daran gewöhnt, in Klassenarbeiten regelmäßig auch Taschenrechner-freie Teile zu bearbeiten, in der Oberstufe ist der A-Teil der Klausuren ebenfalls in Analogie zum Abitur immer ohne Formelsammlung und CAS zu bewältigen. Diese Tatsache bereitet unsere Schüler*innen also langfristig auf die Struktur in der Abiturklausur vor.

Der grafikfähige Taschenrechner mit CAS (am GHG das Modell Casio Classpad CP II 400) wird zu Beginn der Einführungsphase eingeführt.

Der Unterricht in der Sekundarstufe I findet in Einzel- und Doppelstunden statt, es liegt dabei ein 45-Minuten-Raster zugrunde.

In der Regel werden in der Einführungsphase drei parallele Grundkurse eingerichtet, aus denen sich für die Q-Phase ein bis zwei Leistungs- und ein bis zwei Grundkurse entwickeln.

Der Unterricht findet im 45-Minuten-Takt statt, die Kursblockung in der Oberstufe sieht grundsätzlich für Grundkurse eine, für Leistungskurse zwei Doppelstunden vor.

Alle acht examinierten Mathematik-Lehrkräfte am GHG besitzen die Fakultas für die Sekundarstufe I und für die Sekundarstufe II und sind in Mathematik in der Regel auch in beiden Sekundarstufen eingesetzt. Zusätzlich verfügt eine Lehrkraft über ein Zertifikat für die Sekundarstufe I. Allerdings sind zur Zeit drei Kolleg*innen in Elternzeit. Aufgrund dieser Tatsache, und weil sich auf dem Markt keine geeigneten Vertretungskräfte finden lassen, wird der Mathematikunterricht am GHG in zwei Lerngruppen momentan fachfremd erteilt.

1.2 Fachliche Bezüge zum Leitbild der Schule

In unserem Schulprogramm definieren wir uns als Schule, die ihren Schüler*innen Ziele und Grenzen aufzeigt, sie fördert und fordert und damit zu kritischen, mündigen Menschen erzieht, die in der Lage sind, ihr Tun zu reflektieren, tolerant zu sein, Recht von Unrecht zu unterscheiden, und für die ein respektvoller, geordneter Umgang mit Mensch und Tier, Natur und dem Eigentum anderer eine Selbstverständlichkeit ist.

Diesem Leitgedanken fühlt sich die Fachschaft Mathematik in besonderem Maße verpflichtet und leistet ihren Beitrag, indem sie den Schüler*innen Fertigkeiten vermittelt, mit deren Hilfe eine kritische und mündige Teilnahme am gesellschaftlichen Leben möglich ist. Individuelle Förderung ist dabei wesentliches Prinzip allen Unterrichts im Fach Mathematik, da Verstehen und Begreifen nur durch konstruktive Lernprozesse möglich sind.

Dabei greift das Fach Mathematik in allen Inhaltsbereichen ak-tuelle und für Schüler*innen relevante Themen z.B. des Verbraucherschutzes, der Digitalisierung, der ökologischen Bildung auf. Durch das Lernen mit verschiedenen analogen und digitalen Medien in unterschiedlichen Sozialformen und unter Berücksichtigung individueller Lernwege werden jeweils altersgerecht Aufgeschlossenheit und Neugier geweckt und Schüler*innen zu zunehmend eigenständigem Handeln angeleitet. Die Mathematik steht durch ihre Universalität in enger Verbindung zu einer Vielzahl anderer Disziplinen der Geistes- und Naturwissenschaften. Eine verstärkte Zusammenarbeit und Koordinierung der Fachbereiche macht es möglich, komplexe Lerngegenstände umfassend darzustellen und Bezüge zwischen Inhalten der Fächer herzustellen, sodass ein wesentlicher Beitrag zur vertieften Allgemeinbildung geleistet werden kann. Anhand konkreter Problemstellungen werden vorhandene Kenntnisse selbstständiger Lern- und Denkstrategien aufgegriffen und weiterentwickelt.

Die Fachkonferenz tritt mindestens einmal pro Schuljahr zusammen, um notwendige Absprachen zu treffen, Fortbildungsbedarfe zu eruieren und die Lehrpläne kritisch zu sichten und als dynamische Dokumente weiter zu überarbeiten. Zusätzlich treffen sich die Kolleg*innen innerhalb jeder Jahrgangsstufe zu weiteren Absprachen und zur Zusammenarbeit regelmäßig.

1.3 Fachliche Bezüge zu schulischen Standards zum Lehren und Lernen

Dem im Schulprogramm ausgewiesenen Ziel, Schüler*innen ihren Begabungen und Neigungen entsprechend individuell zu fördern und ihnen Orientierung für ihren weiteren Lebensweg zu bieten, fühlt sich die Fachgruppe Mathematik am GHG ebenfalls in besonderer Weise verpflichtet.

Schüler*innen aller Klassen- und Jahrgangsstufen werden zur Teilnahme an den vielfältigen Wettbewerben im Fach Mathematik (Känguru-Wettbewerb, Matheolympiade, Online-Teamwettbewerb) angehalten und begleitet.

Die im Bildungsgang G9 in Klasse 5 im Vergleich zu den G8-Jahrgängen in der Stundentafel zusätzlich verankerte fünfte Wochenstunde im Fach Mathematik wird vorrangig zur individuellen Förderung genutzt, um den unterschiedlichen Voraussetzungen, die die Kinder bei ihrem Start am GHG mitbringen, gerecht werden zu können. Basierend auf einem durch die Fachkonferenz erstellten und jährlich evaluierten Diagnosetest zum sicher verfügbaren Grundschulwissen erhalten die Schüler*innen im Unterricht und darüber hinaus individuell zugeschnittene Aufgaben (z.B. Arbeitsblätter aus den Förderordnern der Fachschaft, Aufgaben in der Lernplattform „Anton“). So soll sichergestellt werden, dass Kinder nicht deshalb bei uns scheitern, weil die Voraussetzungen, die sie selbst nicht zu verantworten haben, nicht ideal waren, indem individuelle Defizite aufgearbeitet und von den Grundschulen mitgebrachte Wissenslücken gezielt geschlossen werden.

Darüber hinaus wird im Rahmen der Modifizierung unseres Förderkonzepts derzeit ein in thematischen Fördermodulen angelegter Förderunterricht in der Jahrgangsstufe 8 erprobt. Schüler*innen melden ihren Bedarf für die Teilnahme an einem der Module einerseits selbst an, eine Zuweisung zum Förderunterricht erfolgt aber darüber hinaus auch durch die Fachlehrer*innen der Jahrgangsstufe. Innerhalb der Module wird den Schüler*innen Gelegenheit gegeben, Schwierigkeiten mit dem Unterrichtsstoff vergangener Schuljahre gezielt aufzuarbeiten. Eine Anpassung des Förderkonzepts für die Mittelstufe, bei dem dem Fach Mathematik eine Förderstunde pro Jahrgangsstufe von der siebten bis zur zehnten Klasse zur Verfügung steht, ist in diesem Schuljahr bereits auf den Weg gebracht worden, muss aber vor dem Hintergrund der Erfahrungen in Deutsch und Mathematik in der Jahrgangsstufe 8 noch durch die Gremien verabschiedet werden. Im Anschluss an den gefassten Beschluss wird die Fachschaft für die einzelnen Jahrgangsstufen in der Mittelstufe Themen für die Fördermodule in Mathematik festlegen (in Jg. 8 im ersten Halbjahr z.B. 1. Terme und Gleichungen, 2. Rationale Zahlen, 3. Zuordnungen und Funktionen).

1.4 Fachliche Zusammenarbeit mit außerunterrichtlichen Partnern

Im Zusammenhang mit der Berufsorientierung besteht für unsere Schüler*innen die Möglichkeit, je nach Neigung Einblicke in verschiedene Berufsfelder zu erlangen. Zur Planung der Berufsfeld-Erkundungstage findet deshalb in Kooperation mit externen Partnern eine Potenzialanalyse statt, auf deren Basis mathematisch besonders interessierte und begabte Schüler*innen gezielt in Richtung entsprechender Berufsfelder beraten werden. In der Oberstufe werden außerdem diverse Hochschultage besucht.

Das Gymnasium im Gustav-Heinemann-Schulzentrum ist eines von drei öffentlichen Gymnasien der Stadt. Aufgrund der örtlichen Lage im Stadtteil Hiesfeld ist eine Zusammenarbeit mit den beiden innerstädtischen Gymnasien und der Gesamtschule nicht möglich. Die Schule zeichnet sich durch einen MINT-Schwerpunkt aus und wird im offenen Ganztag betrieben. Das Gymnasium im GHZ ist in der Sekundarstufe I dreizügig.

2 Entscheidungen zum Unterricht

2.1 Allgemeines zu den Unterrichtsvorhaben

Die Darstellung der Unterrichtsvorhaben im schulinternen Lehrplan besitzt den Anspruch, sämtliche im Kernlehrplan angeführten Kompetenzen abzudecken. Dies entspricht der Verpflichtung jeder Lehrkraft, Schüler*innen Lerngelegenheiten zu ermöglichen, sodass alle Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans von ihnen erfüllt werden können.

Die entsprechende Umsetzung erfolgt auf zwei Ebenen: der Übersichts- und der Konkretisierungsebene.

In den folgenden Übersichtsrastern zu den Unterrichtsvorhaben (Kapitel 2.2, 2.3 und 2.4) wird die Verteilung der Unterrichtsvorhaben dargestellt. Sie ist laut Beschluss der Fachkonferenz verbindlich für die Unterrichtsvorhaben I, II und III der Einführungsphase und für die Unterrichtsphasen der Qualifikationsphase. Die zeitliche Abfolge der Unterrichtsvorhaben IV bis VIII der Einführungsphase ist jeweils auf die Vorgaben zur Vergleichsklausur abzustimmen.

Das Übersichtsraster dient dazu, den Kolleginnen und Kollegen einen schnellen Überblick über die Zuordnung der Unterrichtsvorhaben zu den einzelnen Jahrgangsstufen sowie den im Kernlehrplan genannten Kompetenzen, Inhaltsfeldern und inhaltlichen Schwerpunkten zu verschaffen. Um Klarheit für die Lehrkräfte herzustellen und die Übersichtlichkeit zu gewährleisten, werden in der Kategorie „Kompetenzen" an dieser Stelle nur die übergeordneten Kompetenzerwartungen ausgewiesen, während die konkretisierten Kompetenzerwartungen erst auf der Ebene konkretisierter Unterrichtsvorhaben Berücksichtigung finden. Der ausgewiesene Zeitbedarf versteht sich als grobe Orientierungsgröße, die nach Bedarf über- oder unterschritten werden kann. Um Spielraum für Vertiefungen, individuelle Förderung, besondere Schülerinteressen oder aktuelle Themen zu erhalten, wurden im Rahmen dieses schulinternen Lehrplans ca. 75 Prozent der Bruttounterrichtszeit verplant.

Während der Fachkonferenzbeschluss zum Übersichtsraster in der Einführungsphase Unterrichtsvorhaben zur Gewährleistung vergleichbarer Standards sowie zur Absicherung von Kurswechslern und Lehrkraft-wechseln für alle Mitglieder der Fachkonferenz Bindekraft entfalten soll, (vgl. Kapitel 2.2.1) besitzt die Ausweisung konkretisierter Unterrichtsvorhaben (Kapitel 2.2.2) für die Einführungsphase empfehlenden Charakter. Referendar*innen sowie neuen Kolleg*innen dienen diese vor allem zur standardbezogenen Orientierung in der neuen Schule, aber auch zur Verdeutlichung von unterrichtsbezogenen fachgruppeninternen Absprachen zu didaktisch-methodischen Zugängen, fächerübergreifenden Kooperationen, Lernmitteln und -orten sowie vorgesehenen Leistungsüberprüfungen, die im Einzelnen auch den Kapiteln 2.4 bis 2.6 und Kapitel 3 zu entnehmen sind. Begründete Abweichungen von den vorgeschlagenen Vorgehensweisen bezüglich der konkretisierten Unterrichtsvorhaben sind im Rahmen der pädagogischen Freiheit der Lehrkräfte jederzeit möglich. Sicherzustellen bleibt allerdings auch hier, dass im Rahmen der Umsetzung der Unterrichtsvorhaben insgesamt alle prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen des Kernlehrplans Berücksichtigung finden. Dies ist durch entsprechende Kommunikation innerhalb der Fachkonferenz zu gewährleisten.

2.2 Jahrgangsstufe EF

Stundenbedarfsübersicht zu den Unterrichtsvorhaben

Einführungsphase		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	E-A1	18
II	E-A2	12
III	E-A3	12
IV	E-S1	6
V	E-S2	9
VI	E-A4	12
VII	E-G1	6
VIII	E-G2	9
	Summe:	84

2.2.1 Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben

<table>
<tr><th colspan="2">Einführungsphase</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben I:</u>

Thema:
Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen und deren Nutzung im Kontext (E-A1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Grundlegende Eigenschaften von Potenz-, Exponential- und Sinusfunktionen

Zeitbedarf: 18 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben II:</u>

Thema:
Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A2)

Zentrale Kompetenzen:
• Argumentieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Grundverständnis des Ableitungsbegriffs

Zeitbedarf: 12 Std.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben III:</u>

Thema:
Von den Potenzfunktionen zu den ganzrationalen Funktionen (E-A3)

Zentrale Kompetenzen:
• Problemlösen
• Argumentieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen

Zeitbedarf: 12 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben IV:</u>

Thema:
Den Zufall im Griff – Modellierung von Zufallsprozessen (E-S1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Mehrstufige Zufallsexperimente

Zeitbedarf: 6 Std.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Einführungsphase</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben V:</u>

Thema:
Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten (E-S2)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Kommunizieren

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Zeitbedarf: 9 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben VI:</u>

Thema:
Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A4)

Zentrale Kompetenzen:
• Problemlösen
• Argumentieren

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen

Zeitbedarf: 12 Std.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben VII:</u>

Thema:
Unterwegs in 3D – Koordinatisierungen des Raumes (E-G1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Kommunizieren

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Koordinatisierungen des Raumes

Zeitbedarf: 6 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben VIII:</u>

Thema:
Vektoren bringen Bewegung in den Raum (E-G2)

Zentrale Kompetenzen:
• Problemlösen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Vektoren und Vektoroperationen

Zeitbedarf: 9 Std.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Summe Einführungsphase: 84 Stunden</u></td></tr>
</table>

2.2.2 Konkretisierung der Unterrichtsvorhaben in der Einführungsphase

Vorhabenbezogene Konkretisierung: Funktionen und Analysis (A)

<table>
<tr><td colspan="2">Thema: Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen und deren Nutzung im Kontext (E-A1)</td></tr>
<tr><td>Zu entwickelnde Kompetenzen</td><td>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
<tr><td>Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schüler*innen
• beschreiben die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten sowie quadratischen und kubischen Wurzelfunktionen
• beschreiben Wachstumsprozesse mithilfe linearer Funktionen und Exponentialfunktionen
• wenden einfache Transformationen (Streckung, Verschiebung) auf Funktionen (Sinusfunktion, quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen) an und deuten die zugehörigen Parameter

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):
Modellieren
Die Schüler*innen
• erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
• übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)

Werkzeuge nutzen
Die Schüler*innen
• nutzen Tabellenkalkulation, Funktionenplotter und grafikfähige Taschenrechner
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
… Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle
… zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen</td><td>Algebraische Rechentechniken werden grundsätzlich parallel vermittelt und diagnosegestützt geübt (solange in diesem Unterrichtsvorhaben erforderlich in einer von drei Wochenstunden, ergänzt durch differenzierende, individuelle Zusatzangebote aus Aufgabensammlungen). Dem oft erhöhten Angleichungs- und Förderbedarf von Schulformwechsler*innen wird ebenfalls durch gezielte individuelle Angebote Rechnung getragen.
Hilfreich kann es sein, dabei die Kompetenzen der Mitschüler*innen (z. B. durch Kurzvorträge) zu nutzen.

Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die Einführung in die elementaren Bedienkompetenzen der verwendeten Software und des GTR gerichtet werden.

Als Kontext für die Beschäftigung mit Wachstumsprozessen können zunächst Ansparmodelle (insbesondere lineare und exponentielle) betrachtet und mithilfe einer Tabellenkalkulation verglichen werden. Für kontinuierliche Prozesse und den Übergang zu Exponentialfunktionen werden verschiedene Kontexte (z. B. Bakterienwachstum, Abkühlung) untersucht.

Der entdeckende Einstieg in Transformationen kann etwa über das Beispiel „Sonnenscheindauer“ aus den GTR-Materialien erfolgen, also zunächst über die Sinusfunktion. Anknüpfend an die Erfahrungen aus der SI werden dann quadratische Funktionen (Scheitelpunktform) und Parabeln unter dem Transformationsaspekt betrachtet.</td></tr>
</table>

Thema: *Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A2)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • berechnen durchschnittliche und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Kontext • erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate • deuten die Tangente als Grenzlage einer Folge von Sekanten • deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate/ Tangentensteigung • beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion) • leiten Funktionen graphisch ab • begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte) mit Hilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Argumentieren (Vermuten)*** *Die Schüler*innen* • stellen Vermutungen auf • unterstützen Vermutungen beispielgebunden • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schüler*innen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle … grafischen Messen von Steigungen • nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen	Als Kontext für den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate kann zum Beispiel die vermeintliche Diskrepanz zwischen der Durchschnittsgeschwindigkeit bei einer längeren Fahrt und der durch ein Messgerät ermittelten Momentangeschwindigkeit genutzt werden. Neben zeitabhängigen Vorgängen soll auch ein geometrischer Kontext betrachtet werden. Zur numerischen und geometrischen Darstellung des Grenzprozesses beim Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate bzw. der Sekanten zur Tangenten (Zoomen) kann der GTR eingesetzt werden. Im Zusammenhang mit dem graphischen Ableiten und dem Begründen der Eigenschaften eines Funktionsgraphen sollen die Schüler*innen in besonderer Weise zum Vermuten, Begründen und Präzisieren ihrer Aussagen angehalten werden. Hier sollte der Begriff des Extrempunktes (lokal vs. global) präzisiert werden. Dabei sind auch Sonderfälle, wie eine konstante Funktion, zu betrachten, während eine Untersuchung der Änderung von Änderungen in der Einführungsphase fakultativ ist und erst in der Q1 verbindlich behandelt werden muss.

Thema: *Von den Potenzfunktionen zu den ganzrationalen Funktionen (E-A3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate • beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion) • leiten Funktionen graphisch ab • begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte) mit Hilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen • nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten • wenden die Summen- und Faktorregel auf ganzrationale Funktionen an **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Problemlösen*** *Die Schüler*innen* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* ***Argumentieren*** *Die Schüler*innen* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)*	Für eine quadratische Funktion wird der Grenzübergang („x-Methode“, „h-Methode“) exemplarisch durchgeführt. Um die Ableitungsregel für höhere Potenzen zu vermuten, nutzen die Schüler*innen zum Beispiel den GTR und die Möglichkeit, Werte der Ableitungsfunktionen näherungsweise in einer Tabelle darzustellen und anschaulich zu machen. Der Unterricht erweitert besonders Kompetenzen aus dem Bereich des mathematischen Beweisens. Kontexte spielen in diesem Unterrichtsvorhaben eine untergeordnete Rolle. Quadratische Funktionen können aber stets als Weg-Zeit-Funktion bei Fall- und Wurf- und anderen gleichförmig beschleunigten Bewegungen gedeutet werden. Ganzrationale Funktionen vom Grad 3 werden Gegenstand einer qualitativen Erkundung mit dem GTR, wobei Parameter gezielt variiert werden. Bei der Klassifizierung der Formen können die Begriffe aus Unterrichtsvorhaben II (Thema E-A2) eingesetzt werden. Zusätzlich werden die Symmetrie zum Ursprung und das Globalverhalten untersucht. Die Vorteile einer Darstellung mithilfe von Linearfaktoren und die Bedeutung der Vielfachheit einer Nullstelle werden hier thematisiert. Durch gleichzeitiges Visualisieren der Ableitungsfunktion erklären Lernende die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen 3. Grades durch die Eigenschaften der ihnen vertrauten quadratischen Funktionen. Zugleich entdecken sie die Zusammenhänge zwischen charakteristischen Punkten, woran in Unterrichtsvorhaben VI (Thema E-A4) angeknüpft wird.

Werkzeuge nutzen *Die Schüler*innen* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen	

Thema: *Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A4)*

<table>
<tr><th>Zu entwickelnde Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>
Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schüler*innen

leiten Funktionen graphisch ab
nennen die Kosinusfunktion als Ableitung der Sinusfunktion
begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte) mit Hilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen
nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten
wenden die Summen- und Faktorregel auf ganzrationale Funktionen an
lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern oder Substituieren auf lineare und quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne digitale Hilfsmittel
verwenden das notwendige Kriterium und das Vorzeichenwechselkriterium zur Bestimmung von Extrempunkten
unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich
verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):
Problemlösen
Die Schüler*innen

erkennen Muster und Beziehungen (Erkunden)
nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (hier: Zurückführen auf Bekanntes) (Lösen)
wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus (Lösen)

Argumentieren
Die Schüler*innen
</td><td>
Ein kurzes Wiederaufgreifen des graphischen Ableitens am Beispiel der Sinusfunktion führt zur Entdeckung, dass die Kosinusfunktion deren Ableitung ist.

Für ganzrationale Funktionen werden die Zusammenhänge zwischen den Extrempunkten der Ausgangsfunktion und ihrer Ableitung durch die Betrachtung von Monotonie-Intervallen und der vier möglichen Vorzeichenwechsel an den Nullstellen der Ableitung untersucht. Die Schüler*innen üben damit, vorstellungsbezogen zu argumentieren. Die Untersuchungen auf Symmetrien und Globalverhalten werden fortgesetzt.

Bezüglich der Lösung von Gleichungen im Zusammenhang mit der Nullstellenbestimmung wird durch geeignete Aufgaben Gelegenheit zum Üben von Lösungsverfahren ohne und mit Verwendung des CAS gegeben.

Der logische Unterschied zwischen notwendigen und hinreichenden Kriterien kann durch Multiple-Choice-Aufgaben vertieft werden, die rund um die Thematik der Funktionsuntersuchung von Polynomfunktionen Begründungsanlässe und die Möglichkeit der Einübung zentraler Begriffe bieten.
Neben den Fällen, in denen das Vorzeichenwechselkriterium angewendet wird, werden die Lernenden auch mit Situationen konfrontiert, in denen sie mit den Eigenschaften des Graphen oder Terms argumentieren. So erzwingt z. B. Achsensymmetrie die Existenz eines Extrempunktes auf der Symmetrieachse.

Beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen können auch Tangentengleichungen bestimmt werden.
</td></tr>
</table>

• präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen […]) *(Begründen)* • erkennen fehlerhafte Argumentationsketten und korrigieren sie *(Beurteilen)*	

Vorhabenbezogene Konkretisierung: Analytische Geometrie und lineare Algebra (G)

Thema: *Unterwegs in 3D – Koordinatisierungen des Raumes (E-G1)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum • stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Modellieren*** *Die Schüler*innen* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (*Strukturieren*) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*) ***Kommunizieren (Produzieren)*** *Die Schüler*innen* • wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen	An geeigneten, nicht zu komplexen geometrischen Modellen (z. B. „unvollständigen" Holzquadern) lernen die Schüler*innen ohne Verwendung einer dynamischen Geometriesoftware mithilfe von Schrägbildern, ihr räumliches Vorstellungsvermögen zu entwickeln. Darüber hinaus kann hier ergänzend mit einer DGS gearbeitet werden.

Thema: *Vektoren bringen Bewegung in den Raum (E-G2)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen und Schüler* • deuten Vektoren (in Koordinatendarstellung) als Verschiebungen und kennzeichnen Punkte im Raum durch Ortsvektoren • stellen gerichtete Größen (z. B. Geschwindigkeit, Kraft) durch Vektoren dar • berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mit Hilfe des Satzes von Pythagoras • addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität • weisen Eigenschaften von besonderen Dreiecken und Vierecken mithilfe von Vektoren nach **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Problemlösen*** *Die Schüler*innen* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)*	Durch Operieren mit Verschiebungspfeilen werden einfache geometrische Problemstellungen gelöst: Beschreibung von Diagonalen (insbesondere zur Charakterisierung von Viereckstypen), Auffinden von Mittelpunkten (ggf. auch Schwerpunkten), Untersuchung auf Parallelität.

Vorhabenbezogene Konkretisierung: Stochastik (S)

<table>
<tr><td colspan="2">Thema: Den Zufall im Griff – Modellierung von Zufallsprozessen (E-S1)</td></tr>
<tr><td>Zu entwickelnde Kompetenzen</td><td>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
<tr><td>Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schüler*innen
• deuten Alltagssituationen als Zufallsexperimente
• simulieren Zufallsexperimente
• verwenden Urnenmodelle zur Beschreibung von Zufallsprozessen
• stellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf und führen Erwartungswertbetrachtungen durch
• beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente und ermitteln Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Pfadregeln

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):
Modellieren
Die Schüler*innen
• treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
• übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)

Werkzeuge nutzen
Die Schüler*innen
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
… Generieren von Zufallszahlen
… Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
… Erstellen der Histogramme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
… Berechnen der Kennzahlen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Erwartungswert)</td><td>Beim Einstieg ist eine Beschränkung auf Beispiele aus dem Bereich Glücksspiele zu vermeiden. Einen geeigneten Kontext bietet zum Beispiel die Methode der Zufallsantworten bei sensitiven Umfragen.

Zur Modellierung von Wirklichkeit werden durchgängig Simulationen – auch unter Verwendung von digitalen Werkzeugen (GTR mit CAS, Tabellenkalkulation) – geplant und durchgeführt (Zufallsgenerator).

Das Urnenmodell wird auch verwendet, um grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu thematisieren.

Die zentralen Begriffe Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert werden im Kontext von Glücksspielen erarbeitet und können durch zunehmende Komplexität der Spielsituationen vertieft werden.
Digitale Werkzeuge werden zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Histogramme mit dem CAS) verwendet.</td></tr>
</table>

Thema: *Testergebnisse richtig interpretieren – Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten (E-S2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • modellieren Sachverhalte mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vier- oder Mehrfeldertafeln • bestimmen bedingte Wahrscheinlichkeiten • prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit • bearbeiten Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten. **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** ***Modellieren*** *Die Schüler*innen* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* ***Kommunizieren*** *Die Schüler*innen* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten […] *(Rezipieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)*	*Als Einstiegskontext zur Erarbeitung des fachlichen Inhaltes könnte das HIV-Testverfahren dienen, eine Möglichkeit zur Vertiefung böte dann die Betrachtung eines Diagnosetests zu einer häufiger auftretenden Erkrankung (z. B. Grippe).* Um die Übertragbarkeit des Verfahrens zu sichern, sollen insgesamt mindestens zwei Beispiele aus unterschiedlichen Kontexten betrachtet werden. Zur Förderung des Verständnisses der Wahrscheinlichkeitsaussagen werden parallel Darstellungen mit absoluten Häufigkeiten verwendet. Die Schüler*innen sollen zwischen verschiedenen Darstellungsformen (Baumdiagramm, Mehrfeldertafel) wechseln können und diese zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung und zum Rückschluss auf unbekannte Astwahrscheinlichkeiten nutzen können. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung.

2.3 Jahrgangsstufen Q1 und Q2

2.3.1 Grundkurs

Thema: *Optimierungsprobleme (Q1-GK-A1)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien […] zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten **Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):** **Modellieren** *Die Schüler*innen* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor.(Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)	**Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“** *Das Aufstellen der Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien.* An Problemen, die auf quadratische Zielfunktionen führen, sollten auch unterschiedliche Lösungswege aufgezeigt und verglichen werden. Hier bietet es sich außerdem an, Lösungsverfahren auch ohne digitale Hilfsmittel einzuüben. An mindestens einem Problem entdecken die Schüler*innen die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“). Ein Verpackungsproblem (Dose oder Milchtüte) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik untersucht. *Abschließend empfiehlt es sich, ein Problem zu behandeln, das die Schüler*innen nur durch systematisches Probieren oder anhand des Funktionsgraphen lösen können: Aufgabe zum „ schnellsten Weg “.* Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen werden im Rahmen geeigneter Kontexte (z. B. Neuverschuldung und Schulden

• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren) • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren) ***Problemlösen*** *Die Schüler*innen* • finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation (Erkunden) • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle …) aus, um die Situation zu erfassen (Erkunden) • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern …) (Lösen) • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein (Lösen) • berücksichtigen einschränkende Bedingungen (Lösen) • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (Lösen) • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden	oder Besucherströme in einen Freizeitpark/zu einer Messe und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Die Bestimmung der extremalen Steigung erfolgt zunächst über das Vorzeichenwechselkriterium (an den Nullstellen der zweiten Ableitung).

und Gemeinsamkeiten (Reflektieren)	

Thema: *Funktionen beschreiben Formen - Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (Q1-GK-A2)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben") • beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind	**Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?"** Anknüpfend an die Einführungsphase werden an einem Beispiel in einem geeigneten Kontext (z. B. Fotos von Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst. Anschließend werden aus gegebenen Punkten Gleichungssysteme für die Parameter der Normalform aufgestellt. Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung" des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können z. B. Trassierungsprobleme gewählt werden. Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden

Prozessbezogene Kompetenzen: ***Modellieren*** *Die Schüler*innen* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren) • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren) • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (Validieren) • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (Validieren) ***Werkzeuge nutzen***	Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet. Designobjekte oder architektonische Formen können zum Anlass genommen werden, die Funktionsklassen zur Modellierung auf ganzrationale Funktionen 3. oder 4. Grades zu erweitern und über gegebene Punkte, Symmetrieüberlegungen und Bedingungen an die Ableitung Gleichungen zur Bestimmung der Parameter aufzustellen. Schüler*innen erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen.

*Die Schüler*innen*
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
  ○ Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
  ○ zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
  ○ nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden, Berechnen und Darstellen	

Thema: Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden (Q1-GK-G1)	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar • interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schüler*innen* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells	Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden. Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z. B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden. Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen sollen auch hilfsmittelfrei durchgeführt werden. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend

(Mathematisieren)
• beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren)
• verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (Validieren)
Werkzeuge nutzen
*Die Schüler*innen*
• nutzen Geodreiecke […] geometrische Modelle und Dynamische-Geometrie-Software
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
    ○ grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden
    ○ Darstellen von Objekten im Raum
	geübt werden.
	
	Auf dieser Grundlage können z. B. Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden. Der Einsatz der DGS bietet hier die zusätzliche Möglichkeit, dass der Ort der Strahlenquelle variiert werden kann. Inhaltlich schließt die Behandlung von Schrägbildern an das Thema E-G1 an.

Thema: *Lineare Algebra als Schlüssel zur Lösung von geometrischen Problemen (Q1-GK-G2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • stellen Ebenen in Parameterform dar • untersuchen Lagebeziehungen […] zwischen Geraden und Ebenen • berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext • stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schüler*innen* • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur,	Als Einstiegskontext für die Parametrisierung einer Ebene kann eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten dienen. Diese bildet ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. In diesem Unterrichtsvorhaben werden Problemlösekompetenzen erworben, indem sich heuristische Strategien bewusst gemacht werden (eine planerische Skizze anfertigen, die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt beschreiben, geometrische Hilfsobjekte einführen, bekannte Verfahren zielgerichtet einsetzen und in komplexeren Abläufen kombinieren und unterschiedliche Lösungswege kriteriengestützt vergleichen). Punktproben sowie die Berechnung von Spurgeraden in den Grundebenen und von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen führen zunächst noch zu einfachen Gleichungssystemen. Die Achsenabschnitte erlauben eine Darstellung in einem räumlichen Koordinatensystem. Die Untersuchung von Schattenwürfen eines Mastes auf eine Dachfläche z. B. motiviert eine Fortführung der systematischen Auseinandersetzung (Q-GK-A2) mit linearen Gleichungssystemen, mit

Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen (Erkunden) • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (Lösen) • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen (Lösen) • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. [...] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […]) (Lösen) • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (Lösen) • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten (Reflektieren) • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz (Reflektieren) • analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern (Reflektieren) ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schüler*innen* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum ○ Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen	der Matrix-Vektor-Schreibweise und mit dem Gauß-Verfahren. Die Lösungsmengen werden mit dem GTR bestimmt, zentrale Werkzeugkompetenz in diesem Unterrichtsvorhaben ist die Interpretation des angezeigten Lösungsvektors bzw. der reduzierten Matrix. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung sollte stets deutlich werden.

Thema: *Eine Sache der Logik und der Begriffe: Untersuchung von Lagebeziehungen (Q1-GK-G3)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • · untersuchen Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden […] **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Argumentieren*** *Die Schüler*innen* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (Vermuten) • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober- / Unterbegriff) (Begründen) • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (Begründen) • berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) (Begründen)	Hinweis: Bei zweidimensionalen Abbildungen (z. B. Fotografien) räumlicher Situationen geht in der Regel die Information über die Lagebeziehung von Objekten verloren. Verfeinerte Darstellungsweisen (z. B. unterbrochene Linien, schraffierte Flächen, gedrehtes Koordinatensystem) helfen, dies zu vermeiden und Lagebeziehungen systematisch zu untersuchen. Der Fokus der Untersuchung von Lagebeziehungen liegt auf dem logischen Aspekt einer vollständigen Klassifizierung sowie einer präzisen Begriffsbildung (z. B. Trennung der Begriffe „parallel", „echt parallel", „identisch"). Als Kontext kann dazu die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) aus Q-GK-G1 wieder aufgegriffen werden. Dabei wird evtl. die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten relevant. Begrifflich davon abgegrenzt wird der Abstand zwischen den Flugbahnen. Dies motiviert die Beschäftigung mit orthogonalen Hilfsgeraden (Q-GK-G4).

• überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (Beurteilen) ***Kommunizieren*** *Die Schüler*innen* • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen (Rezipieren) • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang (Produzieren) • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (Produzieren) • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (Produzieren) • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität (Diskutieren)	

Thema: *Räume vermessen – mit dem Skalarprodukt Polygone und Polyeder untersuchen (Q1-GK-G4)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schüler*innen* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (Erkunden) • analysieren und strukturieren die Problemsituation (Erkunden) • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (Lösen) • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. […] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes,	Das Skalarprodukt wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt (alternativ zu einer Herleitung aus dem Kosinussatz). Eine weitere Bedeutung des Skalarproduktes kann mit den gleichen Überlegungen am Beispiel der physikalischen Arbeit erschlossen werden. Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für (im Sinne des Problemlösens offen angelegte) exemplarische geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte (z. B. Gebäude) bezogen werden. Dabei kann z. B. der Nachweis von Dreiecks- bzw. Viereckstypen (anknüpfend an das Thema E-G2) wieder aufgenommen werden. Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt.

Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […]) (Lösen) • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus (Lösen) • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz (Reflektieren)	

Thema: *Von der Änderungsrate zum Bestand (Q1-GK-A3)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe • deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext • skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Kommunizieren*** *Die Schüler*innen* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus […] mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen (Rezipieren) • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege (Produzieren) • wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus	Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb sollten hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen werden (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen mit den Schüler*innen weitere unterschiedliche Strategien zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickelt und verglichen werden. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert. Qualitativ können die Schüler*innen so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen" zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Falls die Lernenden entdecken, welche Auswirkungen dieser Umkehrprozess auf die Funktionsgleichung der „Bilanzfunktion" hat, kann dies zur Überleitung in das folgende Unterrichtsvorhaben genutzt werden.

(Produzieren) • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (Produzieren) • dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar (Produzieren) • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (Produzieren)	

Thema: *Von der Randfunktion zur Integralfunktion (Q1-GK-A4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs • erläutern geometrisch-anschaulich den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) • nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen • bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen • bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrat • bestimmen Flächeninhalte mit Hilfe von bestimmten Integralen	Schüler*innen sollen hier (wieder-)entdecken, dass die Bestandsfunktion eine Stammfunktion der Änderungsrate ist. Dazu kann das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben (vgl. Thema Q-GK-A3) entwickelte numerische Näherungsverfahren auf den Fall angewendet werden, dass für die Änderungsrate ein Funktionsterm gegeben ist. Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Da der Rekonstruktionsprozess auch bei einer abstrakt gegebenen Randfunktion möglich ist, wird für Bestandsfunktionen der Fachbegriff Integralfunktion eingeführt und der Zusammenhang zwischen Rand- und Integralfunktion im Hauptsatz formuliert (ggf. auch im Lehrervortrag). Die Regeln zur Bildung von Stammfunktionen können durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln erarbeitet werden. In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Gesamtbeständen zur Verfügung.

Prozessbezogene Kompetenzen:
Argumentieren
*Die Schüler*innen*
• stellen Vermutungen auf (Vermuten)
• unterstützen Vermutungen beispielgebunden (Vermuten)
• präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (Vermuten)
• stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Begründen)
Werkzeuge nutzen
*Die Schüler*innen*
• nutzen […] digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen
• Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
    ○ Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse
    ○ Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals
	Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graphen werden die Schnittstellen mit dem CAS bestimmt.
	
	Komplexere Übungsaufgaben sollten am Ende des Unterrichtsvorhabens bearbeitet werden, um Vernetzungen mit den Kompetenzen der bisherigen Unterrichtsvorhaben (Funktionsuntersuchungen, Aufstellen von Funktionen aus Bedingungen) herzustellen.

Thema: *Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q2-GK-S1)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben • erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schüler*innen* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)	Anhand verschiedener Glücksspiele wird zunächst der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße definiert. Das Grundverständnis von Streumaßen sollte erzielt werden. Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert aber unterschiedlicher Streuung wird die Definition der Standardabweichung als mittlere quadratische Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; anhand gezielter Veränderungen der Verteilung werden die Auswirkungen auf deren Kenngrößen untersucht und interpretiert. Anschließend werden diese Größen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und zu einfachen Risikoabschätzungen genutzt.

Thema: *Treffer oder nicht? – Bernoulli-Experimente und Binomialverteilungen (Q2-GK-S2)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente • erklären die Binomialverteilung im Kontext und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten • beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen […] **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schüler*innen* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten	Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette’ eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d. h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation und die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an. Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang *n* und Trefferwahrscheinlichkeit *p* erfolgt dabei durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des CAS. Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung für ein zweistufiges Bernoulliexperiment plausibel gemacht werden. Auf eine

<table>
<tr>
<td>eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)
Werkzeuge nutzen
Die Schüler*innen
nutzen grafikfähige Taschenrechner, CAS und Tabellenkalkulationen […]
verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
Generieren von Zufallszahlen
Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen
Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen
Variieren der Parameter von Binomialverteilungen
Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungswert, Standardabweichung)</td>
<td>allgemeingültige Herleitung wird verzichtet.

Durch Erkunden wird festgestellt, dass unabhängig von n und p ca. 68% der Ergebnisse in der 1σ -Umgebung des Erwartungswertes liegen.

Hinweis: Der Einsatz des CAS zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten.</td>
</tr>
</table>

Thema: *Modellieren mit Binomialverteilungen (Q2-GK-S3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen • schließen anhand einer vorgegebenen Entscheidungsregel aus einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schüler*innen* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)	In verschiedenen Sachkontexten wird zunächst die Möglichkeit einer Modellierung der Realsituation mithilfe der Binomialverteilung überprüft. Die Grenzen des Modellierungsprozesses werden aufgezeigt und begründet. In diesem Zusammenhang werden geklärt: - die Beschreibung des Sachkontextes durch ein Zufallsexperiment - die Interpretation des Zufallsexperiments als Bernoullikette - die Definition der zu betrachtenden Zufallsgröße - die Unabhängigkeit der Ergebnisse - die Benennung von Stichprobenumfang *n* und Trefferwahrscheinlichkeit *p* Dies erfolgt in unterschiedlichsten Realkontexten. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“). Verfahren mit vorgegebenen Entscheidungsregeln bieten einen besonderen Anlass, um von einer (ein- oder mehrstufigen) Stichprobenentnahme aus einer Lieferung auf nicht bekannte Parameter in der Grundgesamtheit zu schließen.

• beurteilen die Angemessenheit aufgestellter […] Modelle für die Fragestellung (Validieren) • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (Validieren) ***Argumentieren*** *Die Schüler*innen* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten *(Begründen)*	

Thema: *Von Übergängen und Prozessen (Q2-GK-S4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen • verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schüler*innen* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten	*Hinweis:* *Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schüler*innen modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.* Der Auftrag an Schüler*innen, einen stochastischen Prozess graphisch darzustellen, führt in der Regel zur Erstellung eines Baumdiagramms, dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt. Im Zusammenhang mit der Interpretation der Pfadregeln als Gleichungssystem können sie daraus die Matrix-Vektor-Darstellung des Prozesses entwickeln. Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen

eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren) ***Argumentieren*** *Die Schüler*innen* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (Vermuten) • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (Begründen) • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Begründen) • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (Beurteilen)	Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an.

Thema: *Natürlich: Exponentialfunktionen (Q2-GK-A5)*

<table>
<tr><th>Zu entwickelnde Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

*Die Schüler*innen*

- beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion
- untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze
- interpretieren Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang
- bilden die Ableitungen weiterer Funktionen:
  - natürliche Funktionen

Prozessbezogene Kompetenzen:

Problemlösen

*Die Schüler*innen*

- erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (Erkunden)

</td><td>

Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens sollte eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen stehen (Wachstum und Zerfall).

Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen.

Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate.

Umgekehrt suchen die Lernenden zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle.

Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich quasi automatisch die Frage, für welche Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen.

</td></tr>
</table>

• entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (Lösen)
• nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme) (Lösen)
• führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (Lösen)
• variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung (Reflektieren).
Werkzeuge nutzen
*Die Schüler*innen*
• Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
  ○ zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
  ○ grafischen Messen von Steigungen
• entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus
• nutzen […] digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen	

Thema: *Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q2-GK-A6)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze • interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext • bilden die Ableitungen weiterer Funktionen: ○ Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten • bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) • wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an • wenden die Produktregel auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen an • bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe	Im Zusammenhang mit der Modellierung von Wachstumsprozessen durch natürliche Exponentialfunktionen mit linearen Exponenten wird die Kettenregel eingeführt, um auch (hilfsmittelfrei) Ableitungen für die entsprechenden Funktionsterme bilden zu können. Als Beispiel für eine Summenfunktion wird eine Kettenlinie modelliert. An mindestens einem Beispiel sollte auch ein beschränktes Wachstum untersucht werden. An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen erarbeitet. In diesem Zusammenhang wird die Produktregel zum Ableiten eingeführt. In diesen Kontexten ergeben sich ebenfalls Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird. Parameter werden nur in konkreten Kontexten und nur exemplarisch variiert (**keine systematische Untersuchung von Funktionenscharen**). Dabei werden z. B. zahlenmäßige Änderungen des Funktionsterms bezüglich ihrer Auswirkung untersucht und im

aus der Änderungsrate **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schüler*innen* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren) • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren) • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (Validieren) • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen	Hinblick auf den Kontext interpretiert.

Annahmen (Validieren)	

2.3.2 Leistungskurs

Thema: *Optimierungsprobleme (Q1-LK-A1)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien […] zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten • bilden die Ableitungen weiterer Funktionen • Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten • führen Eigenschaften von zusammengesetzten Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) argumentativ auf deren Bestandteile zurück • wenden die Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionen an **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren***	**Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?"** An mindestens einem Problem entdecken die Schüler*innen die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. „Glasscheibe " oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs"). Ein Verpackungsproblem (Dose oder Milchtüte) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht. Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen werden im Rahmen geeigneter Kontexte (z. B. Neuverschuldung und Schulden oder Besucherströme in einen Freizeitpark/zu einer Messe und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Die Bestimmung der extremalen Steigung erfolgt zunächst über das Vorzeichenwechselkriterium (an den Nullstellen der zweiten Ableitung). Im Zusammenhang mit geometrischen und ökonomischen Kontexten entwickeln die Schüler*innen die Ableitungen von Wurzelfunktionen sowie die Produkt- und Kettenregel und wenden sie an.

*Die Schüler*innen* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren) • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren) • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (Validieren) • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (Validieren) ***Problemlösen*** *Die Schüler*innen* • finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation	

(Erkunden) • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle …) aus, um die Situation zu erfassen (Erkunden) • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Verallgemeinern …) (Lösen) • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein (Lösen) • berücksichtigen einschränkende Bedingungen (Lösen) • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten (Reflektieren)	

Thema: *Funktionen beschreiben Formen - Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen (Q1-LK-A2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionenscharen • bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben") • beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind	**Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?"** Anknüpfend an die Einführungsphase (vgl. Thema E-A1) werden in unterschiedlichen Kontexten (z. B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst. Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung" des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können z. B. Trassierungsprobleme gewählt werden. Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet. Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkten, Symmetrieüberlegungen, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Schüler*innen erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im

Prozessbezogene Kompetenzen: ***Modellieren*** *Die Schüler*innen* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren) • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren) • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (Validieren) • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (Validieren)	Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Über freie Parameter (aus unterbestimmten Gleichungssystemen) werden Lösungsscharen erzeugt und deren Elemente hinsichtlich ihrer Eignung für das Modellierungsproblem untersucht und beurteilt. An innermathematischen „Steckbriefen" werden Fragen der Eindeutigkeit der Modellierung und der Einfluss von Parametern auf den Funktionsgraphen untersucht.

Werkzeuge nutzen
*Die Schüler*innen*
• verwenden das CAS zum
  ○ Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
  ○ zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
• nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden […], Berechnen und Darstellen	

Thema: *Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden (Q1-LK-G1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • stellen Geraden in Parameterform dar • interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext • stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schüler*innen* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells	Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden. Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit mittels einer Funktion zu variieren, z. B. zur Beschreibung einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (hier die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden. Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs werden Strahlen und Strecken einbezogen. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen erlauben die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen. Solche Darstellungen sollten geübt werden. Auf dieser Grundlage können z. B. Schattenwürfe von Gebäuden in

(Mathematisieren)
• beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren)
• verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (Validieren)
Werkzeuge nutzen
*Die Schüler*innen*
• nutzen Geodreiecke, geometrische Modelle und Dynamische-Geometrie-Software
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
    ○ grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden
    ○ Darstellen von Objekten im Raum
	Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden. Der Einsatz der DGS bietet die zusätzliche Möglichkeit, dass der Ort der Strahlenquelle variiert werden kann.

Thema: *Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (Q1-LK-G2)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) • bestimmen Abstände zwischen Punkten und Geraden [...] **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schüler*innen* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (Erkunden) • analysieren und strukturieren die Problemsituation (Erkunden) • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (Lösen) • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten (Reflektieren)	Das Skalarprodukt wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt. Eine weitere Bedeutung des Skalarproduktes kann mit den gleichen Überlegungen am Beispiel der physikalischen Arbeit erschlossen werden. Die formale Frage nach der Bedeutung eines Produktes von zwei Vektoren sowie den dabei gültigen Rechengesetzen wird im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z. B. Division durch einen Vektor) gestellt. Anknüpfend an das Thema E-G2 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarproduktes untersucht. Dabei bieten sich vorrangig Problemlöseaufgaben (z. B. Nachweis von Viereckstypen) an. *Ein Vergleich von Lösungswegen mit und ohne Skalarprodukt kann im Einzelfall dahinterliegende Sätze transparent machen wie z. B. die Äquivalenz der zum Nachweis einer Raute benutzten Bedingungen* $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ *und* $(\vec{a})^2=(\vec{b})^2$ *für die Seitenvektoren* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *eines Parallelogramms.*

	In Anwendungskontexten (z. B. Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes) wird entdeckt, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Hierbei werden unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen. Eine Vernetzung mit Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung bietet sich an.

Thema: *Ebenen als Lösungsmengen von linearen Gleichungen und ihre Beschreibung durch Parameter (Q1-LK-G3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar • stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar • deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es • stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum • bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Argumentieren*** *Die Schüler*innen* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober-/Unterbegriff) (Begründen) • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (Begründen)	Die unterschiedlichen Darstellungsformen von Ebenengleichungrn und ihre jeweilige geometrische Deutung (Koordinatenform, Achsenabschnittsform, Hesse-Normalenform als Sonderformen der Normalenform) werden gegenübergestellt, verglichen und in Beziehung gesetzt. Vertiefend (und über den Kernlehrplan hinausgehend) kann bei genügend zur Verfügung stehender Zeit die Lösungsmenge eines Systems von Koordinatengleichungen als Schnittmenge von Ebenen geometrisch gedeutet werden. Dabei wird die Matrix-Vektor-Schreibweise genutzt. Dies bietet weitere Möglichkeiten, bekannte mathematische Sachverhalte zu vernetzen. Die Auseinandersetzung mit der Linearen Algebra wird in Q-LK-G4 weiter vertieft. Als weitere Darstellungsform wird nun die Parameterform der Ebenengleichung entwickelt. Als Einstiegskontext dient eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten. Diese bildet ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G2 wieder aufgegriffen. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs werden Parallelogramme und Dreiecke beschrieben. So können auch anspruchsvollere Modellierungsaufgaben gestellt werden. Ein Wechsel zwischen Koordinatenform und Parameterform der Ebene ist über die drei Achsenabschnitte möglich. Alternativ wird ein

• überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (Beurteilen) ***Kommunizieren*** *Die Schüler*innen* • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen (Rezipieren) • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege (Produzieren) • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (Produzieren)	Normalenvektor mit Hilfe eines Gleichungssystems bestimmt.

Thema: *Lagebeziehungen und Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten (Q1-LK-G4)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext • untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden […] • berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext • bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Argumentieren*** *Die Schüler*innen* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (Vermuten) • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober-/Unterbegriff) (Begründen) • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische	Die Berechnung des Schnittpunkts zweier Geraden ist eingebettet in die Untersuchung von Lagebeziehungen. Die Existenzfrage führt zur Unterscheidung der vier möglichen Lagebeziehungen. Als ein Kontext kann die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) aus Thema Q-LK-G1 wieder aufgenommen werden, insbesondere mit dem Ziel, die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten im Unterschied zur Abstandsberechnung zwischen den Flugbahnen zu vertiefen. Hier bietet sich wiederum eine Vernetzung mit den Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung an. Die Berechnung des Abstandes zweier Flugbahnen kann für den Vergleich unterschiedlicher Lösungsvarianten genutzt werden. Dabei wird unterschieden, ob die Lotfußpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke mitberechnet werden oder nachträglich aus dem Abstand bestimmt werden müssen. In der Rückschau sollte nun ein Algorithmus entwickelt werden, um über die Lagebeziehung zweier Geraden zu entscheiden.

Argumente für Begründungen (Begründen) • berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige/hinreichende Bedingung, Folgerungen/Äquivalenz, Und-/Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) (Begründen) • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (Beurteilen) ***Kommunizieren*** *Die Schüler*innen* • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen (Rezipieren) • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang (Produzieren) • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (Produzieren) • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (Produzieren) • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität (Diskutieren)	

Thema: *Von der Änderungsrate zum Bestand (Q1-LK-A3)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe • deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext • skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Kommunizieren*** *Die Schüler*innen* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus […] mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen (Rezipieren) • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege (Produzieren) • wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus	*Hinweis: Auch im Leistungskurs bilden eigene anschauliche Erfahrungen ein gutes Fundament für den weiteren Begriffsaufbau.* Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt werden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit - Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Daneben wird die Konstruktion einer Größe (z. B. physikalische Arbeit) erforderlich, bei der es sich nicht um die Rekonstruktion eines Bestandes handelt. Der Einstieg sollte über Kontexte erfolgen, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen werden muss. Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen weitere unterschiedliche Strategien zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickelt und verglichen werden. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert. Qualitativ können die Schüler*innen so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren.

(Produzieren) • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (Produzieren) • dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar (Produzieren) • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (Produzieren)	

Thema: *Von der Randfunktion zur Integralfunktion (Q1-LK-A4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs • erläutern den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion • deuten die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen • nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen • begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs • bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen • bestimmen Integrale numerisch […] • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion • bestimmen Flächeninhalte und Volumina von Körpern, die durch	Schüler*innen sollen hier entdecken, dass die Integralfunktion J_a eine Stammfunktion der Randfunktion ist. Dazu wird das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben entwickelte numerische Näherungsverfahren zur Rekonstruktion einer Größe aus der Änderungsrate auf eine kontextfrei durch einen Term gegebene Funktion angewendet und zur Konstruktion der Integralfunktion genutzt (Verallgemeinerung). Die Graphen der Randfunktion und der genäherten Integralfunktion können sollen verglichen und Beziehungen dazwischen hergestellt werden. Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Um diesen Zusammenhang zu begründen, wird der absolute Zuwachs $J_a(x+h) - J_a(x)$ geometrisch durch Rechtecke nach oben und unten abgeschätzt. Der Übergang zur relativen Änderung mit anschließendem Grenzübergang führt dazu, die Stetigkeit von Funktionen zu thematisieren, und motiviert, die Voraussetzungen zu präzisieren und den Hauptsatz formal exakt zu notieren. Hier bieten sich Möglichkeiten zur inneren Differenzierung: *Formalisierung der Schreibweise bei der Summenbildung, exemplarische Einschachtelung mit Ober- und Untersummen, formale Grenzwertbetrachtung, Vergleich der Genauigkeit unterschiedlicher Abschätzungen.* In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen

die Rotation um die Abszisse entstehen, mit Hilfe von bestimmten und uneigentlichen Integralen • **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Argumentieren*** *Die Schüler*innen* • stellen Vermutungen auf • unterstützen Vermutungen beispielgebunden • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Begründen) • verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten (Begründen) • erklären vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise (Begründen) • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (*Beurteilen)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schüler*innen* • nutzen […] digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren,	Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Produktsummen zur Verfügung. Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Volumina wird stark auf Analogien zur Flächenberechnung verwiesen. (Gedanklich wird z.B. mit einem „Eierschneider“ der Rotationskörper in berechenbare Zylinder zerlegt, analog den Rechtecken oder Trapezen bei der Flächenberechnung. Auch die jeweiligen Summenformeln weisen Entsprechungen auf.) Mit der Mittelwertberechnung kann bei entsprechend zur Verfügung stehender Zeit (über den Kernlehrplan hinausgehend) noch eine weitere wichtige Grundvorstellung des Integrals erarbeitet werden. Hier bieten sich Vernetzungen mit dem Inhaltsfeld Stochastik an.

Berechnen und Darstellen
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum …
  ○ Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse
  ○ Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals	

Thema: *Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q1-LK-S1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben • erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schüler*innen* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)	Anhand verschiedener Glücksspiele wird zunächst der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße definiert. Das Grundverständnis von Streumaßen wird (re)aktiviert. Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als mittlere quadratische Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; über gezielte Veränderungen der Verteilung wird ein Gefühl für die Auswirkung auf deren Kenngrößen entwickelt. Anschließend werden diese Größen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und zu einfachen Risikoabschätzungen genutzt.

Thema: *Treffer oder nicht? – Bernoulli-Experimente und Binomialverteilungen (Q1-LK-S2)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente • erklären die Binomialverteilung einschließlich der kombinatorischen Bedeutung der Binomialkoeffizienten und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten • nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schüler*innen* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)	Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen" wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette' eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d. h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und der Binomialkoeffizienten bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation und die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an. Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation"). *Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten.*

• beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)
Werkzeuge nutzen
*Die Schüler*innen*
• nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […]
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
  ○ Generieren von Zufallszahlen
  ○ Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen
  ○ Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen	

Thema: *Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (Q1-LK-S3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von (binomialverteilten) Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen • nutzen die s-Regeln für prognostische Aussagen • nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schüler*innen* • analysieren und strukturieren die Problemsituation (Erkunden) • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen (Erkunden)	Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR. Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung induktiv entdeckt werden: In einer Tabellenkalkulation wird bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit multipliziert. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ Das Konzept der σ-Umgebungen wird durch experimentelle Daten abgeleitet. Es wird benutzt, um Prognoseintervalle anzugeben, den notwendigen Stichprobenumfang für eine vorgegebene Genauigkeit zu bestimmen und um das $\frac{1}{\sqrt{n}}$- Gesetz der großen Zahlen zu präzisieren.

• erkennen Muster und Beziehungen (Erkunden)
• entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (Lösen)
• nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern) (Lösen)
• interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung (Reflektieren)
Werkzeuge nutzen
*Die Schüler*innen*
• nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […]
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
  ○ Variieren der Parameter von Binomialverteilungen
  ○ Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen
  ○ Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungswert, Standardabweichung)
  ○ Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen	

Thema: *Natürlich: Exponentialfunktionen und Logarithmus (Q2-LK-A5)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**

Inhaltsbezogene Kompetenzen:
*Die Schüler*innen*
• beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und begründen die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion
• nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion
• bilden die Ableitungen weiterer Funktionen:
  ○ natürliche Exponentialfunktion
  ○ Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis
  ○ natürliche Logarithmusfunktion
• nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion: $F\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x), x > 0$.
 	
Prozessbezogene Kompetenzen:
	Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens empfiehlt sich eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen (Wachstum und Zerfall).
	Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen.
	Die Eulersche Zahl kann z. B. über das Problem der stetigen Verzinsung. eingeführt werden. Der Grenzübergang wird dabei zunächst durch den GTR unterstützt. Da der Rechner dabei numerisch an seine Grenzen stößt, wird aber auch eine Auseinandersetzung mit dem Grenzwertbegriff motiviert.
	Die Frage nach der Ableitung einer allgemeinen Exponentialfunktion an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate.
	Umgekehrt wird zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle gesucht.
	Dazu kann man eine Wertetabelle des Differenzenquotienten aufstellen, die immer weiter verfeinert wird. Oder man experimentiert in der Grafik des GTR, indem Tangenten an verschiedenen Stellen an die Funktion gelegt werden. Mit diesem Ansatz kann in einem DGS auch der Graph

Problemlösen
*Die Schüler*innen*
• erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (Erkunden)
• entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (Lösen)
• nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme)(Lösen)
• führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (Lösen)
• variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung (Reflektieren)
Werkzeuge nutzen
*Die Schüler*innen*
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
  ○ zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
  ○ grafischen Messen von Steigungen
• entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus
• nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum
	der Ableitungsfunktion als Ortskurve gewonnen werden.
	Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich automatisch, dass für die Eulersche Zahl als Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen.
	Umkehrprobleme im Zusammenhang mit der natürlichen Exponentialfunktion werden genutzt, um den natürlichen Logarithmus zu definieren und damit auch alle Exponentialfunktionen auf die Basis e zurückzuführen. Mit Hilfe der schon bekannten Kettenregel können dann auch allgemeine Exponentialfunktionen abgeleitet werden.

Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen	

Thema: *Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q2-LK-A6)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsvorgängen und vergleichen die Qualität der Modellierung exemplarisch mit einem begrenzten Wachstum • bestimmen Integrale […] mithilfe von gegebenen oder der eingeführten Formelsammlung entnommenen Stammfunktionen • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schüler*innen* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten	Als Beispiel für eine Summenfunktion eignet sich die Modellierung einer Kettenlinie. An mindestens einem Beispiel wird auch ein beschränktes Wachstum untersucht. An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich deren Verhalten für betragsgroße Argumente erarbeitet. Auch in diesen Kontexten ergeben sich Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird. Weitere Kontexte bieten Anlass zu komplexen Modellierungen mit Funktionen anderer Funktionenklassen, insbesondere unter Berücksichtigung von Parametern, für die Einschränkungen des Definitionsbereiches oder Fallunterscheidungen vorgenommen werden müssen. Vernetzungsmöglichkeiten mit der Stochastik sollten aufgegriffen werden (z. B. Gaußsche Glockenkurve – sofern zu diesem Zeitpunkt bereits behandelt).

eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren) • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren) • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (Validieren) • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (Validieren)	

Thema: *Ist die Glocke normal? (Q2-LK-S4)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion • untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen • beschreiben den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion (Gaußsche Glockenkurve) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schüler*innen* • erfassen und strukturieren [...] komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • übersetzen [...] komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten	Normalverteilungen sind in der Stochastik bedeutsam, weil sich die Summenverteilung von genügend vielen unabhängigen Zufallsvariablen häufig durch eine Normalverteilung approximieren lässt. Dementsprechend empfiehlt die Fachkonferenz den Einstieg in dieses Unterrichtsvorhaben über die Untersuchung von Summenverteilungen. Mit einer Tabellenkalkulation werden die Augensummen von zwei, drei, vier… Würfeln simuliert, wobei in der grafischen Darstellung die Glockenform zunehmend deutlicher wird. *Ergänzung für leistungsfähige Kurse:* Gut geeignet ist auch die Simulation von Stichprobenmittelwerten aus einer (gleichverteilten) Grundgesamtheit. Ergebnisse von Schulleistungstests oder Intelligenztests werden erst vergleichbar, wenn man sie hinsichtlich Mittelwert und Streuung normiert, was ein Anlass dafür ist, mit den Parametern μ und σ zu experimentieren. Auch Untersuchungen zu Mess- und Schätzfehlern bieten einen anschaulichen, ggf. handlungsorientierten Zugang. Da auf dem GTR die Normalverteilung einprogrammiert ist, spielt die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Satz von de Moivre-Laplace) für die Anwendungsbeispiele im Unterricht eine untergeordnete Rolle. Dennoch sollte bei genügender Zeit deren Herleitung als Vertiefung der Integralrechnung im Leistungskurs

eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
• beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren)
• reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (Validieren)
Problemlösen
*Die Schüler*innen*
• erkennen Muster und Beziehungen (Erkunden)
• entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (Lösen)
• wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen (Lösen)
Werkzeuge nutzen
*Die Schüler*innen*
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
  ○ Generieren von Zufallszahlen
  ○ Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
  ○ Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen
  ○ Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen
	thematisiert werden, da der Übergang von der diskreten zur stetigen Verteilung in Analogie zur Approximation von Flächen durch Produktsummen nachvollzogen werden kann (vgl. Q-LK-A3). Die Visualisierung erfolgt mithilfe des GTR.
	Theoretisch ist von Interesse, dass es sich bei der Gaußschen Glockenkurve um den Graphen einer Randfunktion handelt, zu deren Stammfunktion (Gaußsche Integralfunktion) kein Term angegeben werden kann.

• nutzen digitale Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen • entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge, wählen sie gezielt aus und nutzen sie zum Erkunden …, Berechnen und Darstellen • reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge	

Thema: *Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen (Q2-LK-S5)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • interpretieren Hypothesentests bezogen auf den Sachkontext und das Erkenntnisinteresse • beschreiben und beurteilen Fehler 1. und 2. Art **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schüler*innen* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)	Zentral ist das Verständnis der Idee des Hypothesentests, d. h. mit Hilfe eines mathematischen Instrumentariums einzuschätzen, ob Beobachtungen auf den Zufall zurückzuführen sind oder nicht. Ziel ist es, die Wahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen möglichst klein zu halten. Die Logik des Tests soll dabei an datengestützten gesellschaftlich relevanten Fragestellungen, z. B. Häufungen von Krankheitsfällen in bestimmten Regionen oder alltäglichen empirischen Phänomenen (z. B. Umfrageergebnisse aus dem Lokalteil der Zeitung) entwickelt werden, sie kann abschließend in einem ‚Testturm' visualisiert werden. Im Rahmen eines realitätsnahen Kontextes werden folgende Fragen diskutiert: • Welche Hypothesen werden aufgestellt? Wer formuliert diese mit welcher Interessenlage? • Welche Fehlentscheidungen treten beim Testen auf? Welche Konsequenzen haben sie? Durch Untersuchung und Variation gegebener Entscheidungsregeln werden die Bedeutung des Signifikanzniveaus und der Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Fehlentscheidungen 1. und 2. Art zur Beurteilung des Testverfahrens erarbeitet.

Kommunizieren *Die Schüler*innen* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen (Rezipieren) • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege (Produzieren) • führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei (Diskutieren)	

Thema: *Von Übergängen und Prozessen (Q2-LK-S6)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen • verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schüler*innen* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)	*Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schüler*innen modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.* Der Auftrag an Schüler*innen, einen stochastischen Prozess graphisch darzustellen, führt in der Regel zur Erstellung eines Baumdiagramms, dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt. Im Zusammenhang mit der Interpretation der Pfadregeln als Gleichungssystem können sie daraus die Matrix-Vektor-Darstellung des Prozesses entwickeln. Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung, absorbierender Zustand). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an. Eine nicht obligatorische Vertiefungsmöglichkeit besteht darin, Ausgangszustände über ein entsprechendes Gleichungssystem zu ermitteln und zu erfahren, dass der GTR als Hilfsmittel dazu die inverse

• beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren) ***Argumentieren*** *Die Schüler*innen* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (Vermuten) • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (Begründen) • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Begründen) • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (Beurteilen)	Matrix bereitstellt.

Thema: *Untersuchungen an Polyedern (Q2-LK-G5)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an • interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen • stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar • untersuchen Lagebeziehungen […] zwischen Geraden und Ebenen • berechnen (Schnittpunkte von Geraden sowie) Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung)	Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte bezogen werden. Auch hier kann eine räumliche Geometriesoftware eingesetzt werden. Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt. Die Bestimmung von Längen und Winkeln setzt das Thema Q-LK-G2 direkt fort. Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene erlauben Rückschlüsse auf ihre Lagebeziehung. Abstände von Punkten zu Geraden (Q-LK-G2) und zu Ebenen (Q-LK-G3) ermöglichen es z. B., die Fläche eines Dreiecks oder die Höhe und das Volumen einer Pyramide zu bestimmen. Abgesehen von der Abstandsberechnung zwischen Geraden (erst in Q-LK-G5) müssen weitere Formen der Abstandsberechnungen nicht systematisch abgearbeitet werden, sie können bei Bedarf im Rahmen von Problemlöseprozessen in konkrete Aufgaben integriert werden. Das Gauß-Verfahren soll anknüpfend an das Thema Q-LK-A2 im Zusammenhang mit der Berechnung von Schnittfiguren oder bei der Konstruktion regelmäßiger Polyeder vertieft werden. Weiter bietet der Einsatz des CAS Anlass, z. B. über die Interpretation der trigonalisierten Koeffizientenmatrix die Dimension des Lösungsraumes zu untersuchen. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung und der algebraischen Formalisierung soll stets deutlich werden.

• bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schüler*innen* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (Erkunden) • analysieren und strukturieren die Problemsituation (Erkunden) • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (Lösen) • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. […] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, [...]) (Lösen) • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus (Lösen) • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz (Reflektieren) ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schüler*innen* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum ○ Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen	In diesem Unterrichtsvorhaben wird im Sinne einer wissenschaftspropädeutischen Grundbildung besonderer Wert gelegt auf eigenständige Lernprozesse bei der Aneignung eines begrenzten Stoffgebietes sowie bei der Lösung von problemorientierten Aufgaben.

○ Durchführen von Operationen mit Vektoren und Matrizen	

Thema: *Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen und Beweisaufgaben (Q2-LK-G6)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schüler*innen* • stellen Geraden in Parameterform dar • stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar • stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar • untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden und zwischen Geraden und Ebenen • berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) • stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum • bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen **Prozessbezogene Kompetenzen:**	*Hinweis: Angesichts des begrenzten Zeitrahmens ist es wichtig, den Fokus der Unterrichtstätigkeit nicht auf die Vollständigkeit einer „Rezeptsammlung" und deren hieb- und stichfeste Einübung zu allen denkbaren Varianten zu legen, sondern bei den Schüler*innenn prozessbezogene Kompetenzen zu entwickeln, die sie in die Lage versetzen, problemhaltige Aufgaben zu bearbeiten und dabei auch neue Anregungen zu verwerten.* Deshalb empfiehlt die Fachkonferenz, Problemlösungen mit den prozessbezogenen Zielen zu verbinden, ➢ eine planerische Skizze anzufertigen und die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt zu beschreiben, ➢ geometrische Hilfsobjekte einzuführen, ➢ an geometrischen Situationen Fallunterscheidungen vorzunehmen, ➢ bekannte Verfahren zielgerichtet einzusetzen und in komplexeren Abläufen zu kombinieren, ➢ unterschiedliche Lösungswege Kriterien gestützt zu vergleichen. Bei der Durchführung der Lösungswege können die Schüler*innen auf das entlastende Werkzeug des CAS zurückgreifen, jedoch steht dieser

Modellieren *Die Schüler*innen* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren) • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen (Validieren) ***Problemlösen*** *Die Schüler*innen* • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen (Erkunden) • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (Lösen) • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen,	Teil der Lösung hier eher im Hintergrund und soll sogar bei aufwändigeren Problemen bewusst ausgeklammert werden. Bei Beweisaufgaben sollen die Schüler*innen Formalisierungen in Vektorschreibweise rezipieren und ggf. selbst vornehmen. Dabei spielt auch die Entdeckung einer Gesetzmäßigkeit – ggf. mit Hilfe von DGS – eine Rolle. Geeignete Beispiele bieten der Satz von Varignon oder der Sehnen-(Tangenten-)satz von Euklid. Die erworbenen Kompetenzen im Problemlösen sollen auch in Aufgaben zum Einsatz kommen, die einen Kontextbezug enthalten, so dass dieses Unterrichtsvorhaben auch unmittelbar zur Abiturvorbereitung überleitet bzw. zum Zweck der Abiturvorbereitung noch einmal wiederaufgenommen werden soll.

systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Verallgemeinern) (Lösen) • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten (Reflektieren) • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz (Reflektieren) • analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern (Reflektieren) • variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung (Reflektieren)	

2.4 Grundsätze der fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit

In Absprache mit der Lehrerkonferenz sowie unter Berücksichtigung des Schulprogramms hat die Fachkonferenz Mathematik die folgenden fachmethodischen und fachdidaktischen Grundsätze beschlossen. In diesem Zusammenhang beziehen sich die Grundsätze 1 bis 13 auf fächerübergreifende Aspekte, die auch Gegenstand der Qualitätsanalyse sind, die Grundsätze 14 bis 22 sind fachspezifisch angelegt.

2.4.1 Überfachliche Grundsätze

1) Geeignete Problemstellungen zeichnen die Ziele des Unterrichts vor und bestimmen die Struktur der Lernprozesse.
2) Inhalt und Anforderungsniveau des Unterrichts orientieren sich an den verbindlichen Anforderungen der Kernlehrpläne.
3) Die Unterrichtsgestaltung ist auf die Lerngruppe, die Ziele und Inhalte abgestimmt.
4) Der Unterricht fördert eine aktive Teilnahme der Schüler/innen.
5) Der Unterricht fördert die Zusammenarbeit zwischen den Schülern/innen und bietet ihnen Möglichkeiten zu eigenen Lösungen.
6) Der Unterricht berücksichtigt die individuellen Lernwege der einzelnen Schüler/innen.
7) Die Schüler/innen erhalten Gelegenheit zu selbstständiger Arbeit und werden dabei unterstützt.
8) Der Unterricht fördert strukturierte und funktionale Partner- bzw. Gruppenarbeit.
9) Der Unterricht fördert strukturierte und funktionale Arbeit im Plenum.
10) Die Lernumgebung ist vorbereitet; der Ordnungsrahmen wird eingehalten.
11) Die Lehr- und Lernzeit wird intensiv für Unterrichtszwecke genutzt.
12) Es herrscht ein positives pädagogisches Klima im Unterricht.
13) Wertschätzende Rückmeldungen prägen die Bewertungskultur und den Umgang mit Schüler*innen.

2.4.2 Fachliche Grundsätze

14) Im Unterricht werden fehlerhafte Schülerbeiträge produktiv im Sinne einer Förderung des Lernfortschritts der gesamten Lerngruppe aufgenommen.
15) Der Unterricht ermutigt die Lernenden dazu, auch fachlich unvollständige Gedanken zu äußern und zur Diskussion zu stellen.
16) Die Bereitschaft zu problemlösenden Arbeiten wird durch Ermutigungen und Tipps gefördert und unterstützt.
17) Die Einstiege in neue Themen erfolgen grundsätzlich mithilfe sinnstiftender Kontexte, die an das Vorwissen der Lernenden anknüpfen und deren Bearbeitung sie in die dahinter stehende Mathematik führt.
18) Es wird genügend Zeit eingeplant, in der sich die Lernenden neues Wissen aktiv konstruieren und in der sie angemessene Grundvorstellungen zu neuen Begriffen entwickeln können.
19) Durch regelmäßiges wiederholendes Üben bleiben grundlegende Fertigkeiten präsent.
20) Im Unterricht werden an geeigneter Stelle differenzierende Aufgaben eingesetzt.
21) Die Lernenden werden zu regelmäßiger, sorgfältiger und vollständiger Dokumentation der von ihnen bearbeiteten Aufgaben angehalten.
22) Im Unterricht wird auf einen angemessenen Umgang mit fachsprachlichen Elementen geachtet.

2.5 Grundsätze der Leistungsbewertung und -rückmeldung

Auf der Grundlage von § 48 SchulG, § 13 APO-GOSt sowie Kapitel 3 des Kernlehrplans Mathematik hat die Fachkonferenz im Einklang mit dem entsprechenden schulbezogenen Konzept die nachfolgenden Grundsätze zur Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung beschlossen. Die nachfolgenden Absprachen stellen die Minimalanforderungen an das lerngruppenübergreifende gemeinsame Handeln der Fachgruppenmitglieder dar. Bezogen auf die einzelne Lerngruppe kommen ergänzend weitere der in den Folgeabschnitten genannten Instrumente der Leistungsüberprüfung zum Einsatz.

Zu den Bewertungsgrundlagen zählen:

- Klausuren
- sonstige Mitarbeit

2.5.1 Klausuren

Jahrgangsstufe	Anzahl der Klausuren	Dauer in Minuten
EF*	4	90
Q1	4**	GK: 90 und LK: 135
Q2***	3 (2/1)	1. Halbjahr: GK: 135, LK: 225 2. Halbjahr: GK: 225, LK: 270

*: Im 2. Halbjahr ist die 2. Klausur die zentral gestellte Vergleichsarbeit.

**: Wird von den Schüler*innen eine Facharbeit in Mathematik geschrieben, ersetzt die Note der Facharbeit die Note der dritten Klausur in Q_1, die dann nicht mitgeschrieben wird. (vgl. APO-GOSt B § 14 (3) und VV 14.3)

***: Die Klausur im zweiten Halbjahr von Q2 findet unter Abiturbedingungen statt und entspricht deshalb auch bezüglich der Dauer der Abiturklausur.

Klausurtermine werden am Anfang eines jedes Halbjahres angekündigt und sind dem Klausurplan der Schule zu entnehmen.

Die Anforderungen werden den Schüler*innen im Unterricht klar aufgezeigt.

Die Aufgaben werden mit Punkten bewertet.

Um die Note „ausreichend minus" zu erreichen, sind 40% der Gesamtpunkte erforderlich, bei weniger als 20% wird die Leistung mit ungenügend bewertet.

Der Punktebereich für die Notenstufen „ausreichend minus" bis „sehr gut plus" wird in äquidistante Intervalle unterteilt.

Zusätzlich sind bei der Bewertung häufige Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit in der deutschen Sprache und gegen die äußere Form angemessen zu berücksichtigen. (Absenkung der Note um bis zu 2 Notenpunkte).

Verbindliche Absprachen:

- Die Aufgaben für Klausuren in parallelen Grund- bzw. Leistungskursen werden im Vorfeld abgesprochen.
- Klausuren können nach entsprechender Wiederholung im Unterricht auch Aufgabenteile enthalten, die Kompetenzen aus weiter zurückliegenden Unterrichtsvorhaben oder übergreifende prozessbezogene Kompetenzen erfordern.
- Mindestens eine Klausur je Schuljahr in der E-Phase sowie in Grund- und Leistungskursen der Q-Phase enthält einen „hilfsmittelfreien" Teil.

- Alle Klausuren in der Q-Phase enthalten auch Aufgaben mit Anforderungen im Sinne des Anforderungsbereiches III (vgl. Kernlehrplan Kapitel 4).
- Für die Aufgabenstellung der Klausuraufgaben werden die Operatoren der Aufgaben des Zentralabiturs verwendet. Diese werden zuvor im Unterricht mit den Schüler*innen besprochen.
- Die Korrektur und Bewertung der Klausuren erfolgen mithilfe eines transparenten Erwartungshorizonts.

2.5.2 Sonstige Mitarbeit

Für die Bewertung der sonstigen Mitarbeit werden folgende Kriterien in ihren Ausprägungen herangezogen:

Kriterium	**Ausprägung von … bis**
a) Mitarbeit (quantitativ)	aktiv … rezeptiv, aus eigenem Antrieb … nach Aufforderung, regelmäßig … nie
b) Qualität der Beiträge	zusammenhängend … einsilbig, zum Thema/zur Frage … nicht zum Thema, stets richtig ... stets falsch bzw. nicht korrekt, eigene … rein reproduktive Beiträge, den Unterricht bereichernde Fragen, selbstständige Lösungsansätze, Anwendungsvorschläge
c) Kenntnisse (auch Fachbegriffe, Fachsprache)	sicher vorhanden … keine / unsicher
d) Gruppenarbeit	engagiert … rein passiv rezeptiv, gute … schlechte Ergebnisdokumentation,

	gute … schlechte Verfügbarkeit für die Gruppe, gelungene … keine Ergebnispräsentation
e) Selbstständiges Arbeiten	strukturiert … unstrukturiert, zielbewusst … planlos, kritische Reflexion … unreflektiert
f) Übernahme von Sonderaufgaben (Präsentationen, Referate, Recherchen usw.)	zuverlässig, bereitwillig … widerwillig, gut aufbereitete … unzureichende Ergebnisse
g) Aufarbeiten von Fehlstunden	bemüht … nicht bemüht, zielstrebig … indifferent, interessenlos, selbstständig … nur nach Aufforderung
h) Hausaufgaben	angemessen … unvollständig erledigt, regelmäßig … in der Regel nicht erledigt, eigenständige Leistung, guter Vortrag … keine Präsentation
i) Schriftliche Übungen	sehr gut … ungenügend
j) Medieneinsatz (GTR mit CAS, Tabellenkalkulation, Office365, Programme)	sicherer … kein Umgang, sinnvoller … unüberlegter Einsatz, kritische … keine Reflexion

Die Bewertungskriterien werden mit den Schüler*innen am Anfang jedes Kurshalbjahres neu besprochen und besondere Beobachtungsschwerpunkte gemeinsam mit dem Kurs festgelegt.

Schüler*innen wird in allen Kursen Gelegenheit gegeben, mathematische Sachverhalte zusammenhängend (z.B. eine Hausaufgabe, einen fachlichen Zusammenhang, einen Überblick über Aspekte eines Inhaltsfeldes …) selbstständig vorzutragen.

Die Noten für die sonstige Mitarbeit werden den Schüler*innen jeweils zum Quartalsende bekannt gegeben.

Präsenz- und Distanzunterricht können durch die Kriterien gleichermaßen bewertet werden (vgl. § 6 „Zweite Verordnung zur befristeten Änderung der Ausbildungs- und Prüfungsordnungen gemäß § 52 SchulG" vom 30.06.2020), da die Schüler*innen des GHG über Office 365 Zugriff auf OneNote-Kursnotizbücher, Teams und Outlook haben und zusätzlich der Untis-Messenger als schulinterne Kommunikationsplattform genutzt werden kann.

Kriterien für die Überprüfung der sonstigen Leistungen

Im Fach Mathematik ist in besonderem Maße darauf zu achten, dass die Schüler*innen zu konstruktiven Beiträgen angeregt werden. Daher erfolgt die Bewertung der sonstigen Mitarbeit nicht defizitorientiert oder ausschließlich auf fachlich richtige Beiträge ausgerichtet. Vielmehr bezieht sie Fragehaltungen, begründete Vermutungen, sichtbare Bemühungen um Verständnis und Ansatzfragmente mit in die Bewertung ein.

Im Folgenden werden Kriterien für die Bewertung der sonstigen Leistungen jeweils für eine gute bzw. eine ausreichende Leistung dargestellt. Dabei ist bei der Bildung der Quartals- und Abschlussnote jeweils die Gesamtentwicklung der Schüler*in zu berücksichtigen, eine arithmetische Bildung aus punktuell erteilten Einzelnoten erfolgt nicht:

	Anforderungen für eine	
Leistungsaspekt	**gute Leistung**	**ausreichende Leistung**
	*Die Schüle*rin*	
Qualität der Unterrichtsbeiträge	nennt richtige Lösungen und begründet sie nachvollziehbar im Zusammenhang der Aufgabenstellung	nennt teilweise richtige Lösungen, in der Regel jedoch ohne nachvollziehbare Begründungen
	geht selbstständig auf andere Lösungen ein, findet Argumente und Begründungen für ihre/seine eigenen Beiträge	geht selten auf andere Lösungen ein, nennt Argumente, kann sie aber nicht begründen
	kann ihre/seine Ergebnisse auf unterschiedliche Art und mit unterschiedlichen Medien darstellen	kann ihre/seine Ergebnisse nur auf eine Art darstellen
Kontinuität/Quantität	beteiligt sich regelmäßig am Unterrichtsgespräch	nimmt eher selten am Unterrichtsgespräch teil
Selbstständigkeit	bringt sich von sich aus	beteiligt sich gelegentlich ei-

	in den Unterricht ein	genständig am Unterricht
	ist selbstständig ausdauernd bei der Sache und erledigt Aufgaben gründlich und zuverlässig	benötigt oft eine Aufforderung, um mit der Arbeit zu beginnen; arbeitet Rückstände nur teilweise auf
	strukturiert und erarbeitet neue Lerninhalte weitgehend selbstständig, stellt selbstständig Nachfragen	erarbeitet neue Lerninhalte mit umfangreicher Hilfestellung, fragt diese aber nur selten nach
	erarbeitet bereitgestellte Materialien selbstständig	erarbeitet bereitgestellte Materialen eher lückenhaft
Hausaufgaben	erledigt sorgfältig und vollständig die Hausaufgaben	erledigt die Hausaufgaben weitgehend vollständig, aber teilweise oberflächlich
	trägt Hausaufgaben mit nachvollziehbaren Erläuterungen vor	nennt die Ergebnisse, erläutert erst auf Nachfragen und oft unvollständig
Kooperation	bringt sich ergebnisorientiert in die Gruppen-/Partnerarbeit ein	bringt sich nur wenig in die Gruppen-/Partnerarbeit ein
	arbeitet kooperativ und respektiert die Beiträge Anderer	unterstützt die Gruppenarbeit nur wenig, stört aber nicht
Gebrauch der Fachsprache	wendet Fachbegriffe sachangemessen an und kann ihre Bedeutung erklären	versteht Fachbegriffe nicht immer, kann sie teilweise nicht sachangemessen anwenden
Werkzeuggebrauch	setzt Werkzeuge im Unterricht sicher bei der Bearbeitung von Aufgaben und zur Visualisierung von Ergebnissen ein	benötigt häufig Hilfe beim Einsatz von Werkzeugen zur Bearbeitung von Aufgaben
Präsentation/Referat	präsentiert vollständig, strukturiert und gut nachvollziehbar	präsentiert an mehreren Stellen eher oberflächlich, die Präsentation weist Verständnislücken auf
Schriftliche Übung	weitestgehend vollständige und richtige Bearbeitung	in Grundzügen richtige Bearbeitung

2.5.3 Kursabschlussnote

Die Kursabschlussnote setzt sich aus den Klausurnoten und den Noten für die sonstige Mitarbeit zusammen. Dabei werden beide Bereiche unter Berücksichtigung des pädagogischen Ermessensspielraums im Sinne der Schüler*innen gleich gewichtet.

2.6 Lehr- und Lernmittel

Lambacher Schweizer. Mathematik Einführungsphase NRW.

Lambacher Schweizer: Mathematik Qualifikationsphase Grundkurs/Leistungskurs NRW.

Nach dem Schuljahr 2021/22 für LK und GK auslaufend laut Fachkonferenzbeschluss vom 26.10.2020: Lambacher Schweizer. Gesamtband mit CAS.

Formelsammlung: Das große Tafelwerk

Casio Classpad CP II 400

Office365-Anwendungen: Teams, OneNote-Kursnotizbücher, Excel

Geogebra

3 Entscheidungen zu fach- und unterrichtsübergreifenden Fragen

Die Fachkonferenz Mathematik hat sich im Rahmen des Schulprogramms und in Absprache mit den betreffenden Fachkonferenzen auf folgende, zentrale Schwerpunkte geeinigt:

3.1 Zusammenarbeit mit anderen Fächern

Der Sprache als Mittel zur Darstellung von fachunterrichtlich relevanten Gegenständen, Begriffen und Gesetzmäßigkeiten gilt in allen Fächern eine besondere Aufmerksamkeit. Die Absprachen betreffen im Wesentlichen den Umgang mit Sprache bzw. zunehmend auch Fachsprache in allen Fächern, z.B. das Erlernen fachsprachlicher Begriffe, das Lesen und Interpretieren von Texten mit Karten und Diagrammen (vgl. 5.6 „Maßstäbe“ -> Erdkunde, 6.6 „Darstellung von Wahlergebnissen“ -> Politik, das Formulieren mündlicher und schriftlicher Beiträge. Hinzu kommen einzelne Absprachen auf der Ebene von Prozessen, z.B. im Bereich Argumentieren und Kommunizieren.
In den naturwissenschaftlichen Fächern erfolgt darüber hinaus insbesondere eine Kooperation auf der Ebene einzelner Kontexte (z.B. 7.3 „Ganze Zahlen“). An den in den vorangegangenen Kapiteln ausgewiesenen Stellen wird das Vorwissen aus diesen Kontexten aufgegriffen und durch die mathematische Betrachtungsweise neu eingeordnet. Der besonderen Rolle der Mathematik in den Naturwissenschaften soll dadurch Rechnung getragen werden, dass die Erkenntnis von Zusammenhängen mathematisiert werden kann. Im Bereich der mathematischen Modellierung von Sachverhalten werden die naturwissenschaftlichen Modelle als Grundlage für sinnvolle Modellannahmen verdeutlicht.
Die Abstimmungen zum MKR wurden von der Lehrerkonferenz im Rahmen eines pädagogischen Tages gemeinsamen erarbeitet und von externen Mitgliedern des entsprechenden Kompetenzteams für das GHG in einer gemeinsamen Übersicht zusammengestellt. (vgl. Ordner „Medien“, Datei „Alle Fächer“ in der Generalakte des GHG).
Für die Rahmenvorgabe Verbraucherbildung leistet das Fach Mathematik per se einen entscheidenden Beitrag, denn eine aktive und kritische Teilnahme am Leben unserer zunehmend konsumorientierten Gesellschaft wäre ohne ein Verständnis für die mathematischen Grundlagen nur schwerlich möglich (vgl. z.B. Dreisatz, Zinsen, Rabatte).

3.2 Außerschulische Lernorte

Der Mathematikunterricht ist in vielen Fällen auf reale oder realitätsnahe Kontexte bezogen. Dabei können außerschulische Lernorte in der näheren Umgebung auch in den oberen Jahrgangsstufen genutzt werden. Eine Absprache zwischen parallelen Kursen und auch mit den Kolleg*innen anderer Fächer ist vorgesehen und gelingt am GHG auch wegen des kleinen Systems und des damit verbundenen immer möglichen direkten Austauschs gut.

3.3 Wettbewerbe

Die Schüler*innen der Sekundarstufen I und II nehmen optional an folgenden Wettbewerben teil: Känguru der Mathematik, Mathematikolympiade und Online-Teamwettbewerb.

Im Rahmen der anstehenden Modifizierung des Förderkonzepts in der Mittelstufe ist angedacht, einzelne Fördermodule nicht zum Abbau von Defiziten, sondern gezielt zur Begabtenförderung und zur Vorbereitung auf komplexe Wettbewerbe wie die Matheolympiade und den Online-Teamwettbewerb zu nutzen. Von einer solchen Stärkung der Begabtenförderung in der Mittelstufe würden entsprechende Schüler*innen auch in der Oberstufe profitieren. Herausragend begabten Schüler*innen (in Mathematik oder auch in anderen Fächern) wird durch eine entsprechende Stundenplangestaltung ein vorzeitiger Studienbeginn ermöglicht.

4 Qualitätssicherung und Evaluation

Die Fachschaft Mathematik am GHG verfolgt das Ziel, den Unterricht an unserem Gymnasium zu verbessern und weiterzuentwickeln.

4.1 Maßnahmen der fachlichen Qualitätssicherung

In den gemeinsamen Dienstbesprechungen der parallel unterrichtenden Lehrkräfte wird Raum geschaffen für den fachlichen und fachdidaktischen Austausch und für konkrete Absprachen über zu erreichende Ziele. Dazu dienen beispielsweise auch der regelmäßige Austausch über durchgeführte Unterrichtsvorhaben sowie die gemeinsame Konzeption von Unterrichtsmaterialien.

Dabei prüft das Fachkollegium kontinuierlich, inwieweit die im schulinternen Lehrplan vereinbarten Maßnahmen zum Erreichen der im Kernlehrplan vorgegebenen Ziele geeignet sind.

Die Fachkolleg*innen nehmen nach Bedarf an Fortbildungen teil, um fachliches Wissen zu aktualisieren und pädagogische sowie didaktische Handlungsalternativen zu entwickeln. Zudem werden die Erkenntnisse und Materialien aus fachdidaktischen Fortbildungen und Implementationen zeitnah auf der nächsten Fachkonferenz in der Fachgruppe vorgestellt.

Nach den in jedem Jahrgang angedachten gemeinsam entwickelten Parallelklausuren werden diese evaluiert. Anschließend werden die Erfahrungen ausgetauscht und die weitere Vorgehensweise abgesprochen.

Darüber hinaus werden die Ergebnisse der zentralen Klausuren der EF und des Zentralabiturs in der Fachkonferenz vorgestellt und von den parallel unterrichtenden Lehrkräften zur Überprüfung und Weiterentwicklung des Unterrichts genutzt.

Feedback von Schülerinnen und Schülern wird als wichtige Informationsquelle zur Qualitätsentwicklung des Unterrichts angesehen. Sie bekommen deshalb Gelegenheit, ihre Meinungen und Einschätzungen zum Unterricht zu äußern.

4.2 Überarbeitungs- und Planungsprozess

In der Fachkonferenz werden Möglichkeiten der Weiterentwicklung der Zielsetzungen und Methoden des Unterrichts angeregt, diskutiert und Veränderungen im schulinternen Curriculum abgestimmt. Eine Evaluation soll jährlich erfolgen, um dem dynamischen Charakter der schulinternen Lehrpläne gerecht zu werden. In den Dienstbesprechungen der Fachgruppe zu Schuljahresbeginn werden die Erfahrungen des vorangehenden Schuljahres ausgewertet und diskutiert sowie eventuell notwendige Konsequenzen formuliert.

Von der Fachgruppe Mathematik erkannte Fortbildungsnotwendigkeiten werden der Fortbildungskoordination benannt und entsprechende schulinterne und -externe Fortbildungen beantragt.

Weitergehende, insbesondere fachliche, fachdidaktische oder methodische Fortbildungen werden bedarfsgerecht von den Lehrkräften wahrgenommen. Die Inhalte der Fortbildung werden der Fachgruppe vorgestellt und gemeinsam zur Unterrichtsentwicklung genutzt.

4.3 Checkliste zur Evaluation

Zielsetzung: Der schulinterne Lehrplan ist als dynamisches Dokument zu sehen. Dementsprechend sind die dort getroffenen Absprachen stetig zu überprüfen, um ggf. Modifikationen vornehmen zu können. Die

Fachschaft trägt durch diesen Prozess zur Qualitätsentwicklung und damit zur Qualitätssicherung des Faches bei.

Checkliste zur Begleitung des Evaluationsprozesses:

Die Überprüfung erfolgt zukünftig jährlich. Zu Schuljahresbeginn werden die Erfahrungen des vergangenen Schuljahres in der Fachkonferenz ausgetauscht, bewertet und eventuell notwendige Konsequenzen formuliert und der schulinterne Lehrplan entsprechend überarbeitet. Im Detail werden dazu folgende Punkte berücksichtigt:

- In jedem Schuljahr werden die Übersichten über die Unterrichtsvorhaben der bis dahin fertig erstellten Jahrgangsstufen von den Fachlehrer*innen überprüft und gegebenenfalls angepasst, die die Jahrgangsstufe im Schuljahr zuvor unterrichtet haben.
- In jedem Schuljahr werden die Rahmenbedingungen der fachlichen Arbeit (S. 3-6) auf ihre Aktualität hin überprüft und gegebenenfalls angepasst.
- In jedem Schuljahr wird überprüft, ob die in Kapitel 3 aufgeführten Lehr- und Lernmittel aktualisiert werden müssen.
- In jedem Schuljahr wird das Inhaltsverzeichnis aktualisiert (Seitenzahlen).

Redaktionelle Anmerkung: *Dieser schulinterne Lehrplan wurde mithilfe des QUA-LiS-Lehrplannavigators erstellt.*